Translation of *Learning mathematics through puzzles : Rossi & Shikha* **From Azim premji University At Right Angles_July, 2014**

पहेलियों के माध्यम से गणित सीखें

कोई हल न होना भी एक अच्छा हल है

रोस्सी और शिखा टेक्कर

गणित की पहेलियों को प्राय: गणित के हाशिए पर रखा जाता है और इन्हें विषय का मूल हिस्सा नहीं माना जाता। कारण यह हो सकता है कि कई बार हमारा सामना ऐसी पहेलियों से भी होता है जिनका कोई हल नहीं होता। गणित का अध्ययन करने वालों तथा स्कूली बच्चों में अक्सर यह धारणा होती है कि गणितीय सवालों के जवाब होने ही चाहिए। इस आलेख में हम कहना चाहते हैं कि पहेलियाँ गणित के कुछ बुनियादी विचारों को सीखने का अहम स्रोत हो सकती हैं। हम अपने दावे के समर्थन में एक उदाहरण प्रस्तुत कर रहे हैं जो यह बताता है कि ऐसे गणितीय सवाल जिनका कोई हल नहीं होता, वे भी गणित के शिक्षण और प्रशिक्षण के लिए उतने ही महत्वपूर्ण हैं जितने कि हल वाले सवाल।

मुख्य शब्द : *पहेली, खेल,हल,प्रमाण,वैधता, अपरिवर्तनीयता*

भूमिका

अक्सर पहेलियों को खेल अथवा गणित की नियमित कक्षाओं से इतर फ़ुरसत में की जाने वाली गतिविधि माना जाता है। लक्ष्य आमतौर पर यह देखना होता है कि कौन कितनी जल्दी उसे हल करता है और उसे हल करने का सबसे छोटा और सम्भवत: सबसे तेज़ तरीक़ा क्या है। परन्तु, यह जानते हुए भी कि उनकी प्रकृति गणितीय है, उन्हें 'गहन गणित से सम्बद्ध' नहीं माना जाता।

इन पहेलियों में गणित के सभी तत्व और विषयवस्तु विद्यमान होते हैं : प्रमाण (उपपत्ति), सामान्यीकरण, पैटर्न पहचानना, किसी कथन को सत्य मानकर उसका खण्डन करना, किसी हल का न होना आदि। इस आलेख में हम एक पहेली प्रस्तुत कर रहे हैं जिसका उपयोग दो सार्वजनिक कार्यक्रमों में प्रतिभागियों के साथ कुछ बुनियादी गणितीय विचारों पर चर्चा के लिए किया गया था। प्रतिभागियों में कक्षा चार के विद्यार्थियों से लेकर बीएड स्नातक तक शामिल थे। इन कार्यक्रमों के लिए हमने कुछ ऐसी पहेलियाँ या प्रश्न तैयार किए थे जिन्हें हल करने के लिए लीक से हटकर तरीक़ों की ज़रूरत थी।

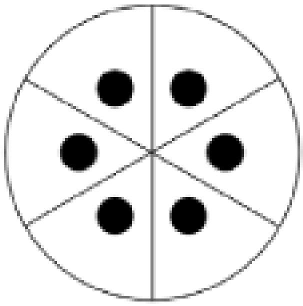
'लीक से हटकर' से हमारा तात्पर्य है कि इन सवालों के हल प्रारम्भिक गणित, एक सुपरिभाषित पाठ्यक्रम, अथवा एक एल्गोरिदम (सूत्रविधि) तक सीमित नहीं थे। हमारे विचार के मूल में एक

बात यह भी थी कि पहेलियाँ ऐसी होनी चाहिए जो विद्यार्थियों को गणित की कुछ महत्त्वपूर्ण अवधारणाएँ समझने का मौक़ा दें।

पहेली : वृत्त एवं गोटियाँ

(1, पृष्ठ 125) में हमारा सामना इस पहेली से हुआ।

*एक वृत्त छह खण्डों में बँटा हुआ है। प्रत्येक खण्ड में एक गोटी है (देखें **चित्र-1**)। आपको सभी गोटियों को एक खण्ड में लाना है और इसके लिए छलाँग का प्रयोग किया जा सकता है। इस दौरान इन दो नियमों का पालन करना होगा : (1) एक छलाँग में गोटी केवल पास वाले किसी खण्ड में जा सकती है। (2) हर चाल में दो छलाँग लगाई जाएँगी।*



चित्र-1 : छह खण्डों में बँटा वृत्त

इस पहेली के मूल में द्विभाज्यता (parity) और अपरिवर्तनीयता (invariance) हैं तथा प्रस्तावित जवाब यह है कि इसका कोई हल नहीं है। इस दावे का प्रमाण निम्नानुसार है।

खण्डों को 1 से 6 तक क्रमांक दीजिए, प्रत्येक खण्ड के क्रमांक और उसमें रखी गोटियों की संख्या का गुणनफल निकालिए। मान लेते हैं कि इन गुणनफलों का योग S है। हम इसे 'स्कोर' कहेंगे। खेल के आरम्भ में हर खण्ड में एक गोटी है तो स्कोर है 1+2+3+4+5+6 = 21।

पहली चाल में मान लीजिए कि एक गोटी खण्ड 2 से छलाँग लगाकर खण्ड 3 में जाती है और एक गोटी खण्ड 4 से खण्ड 5 में जाती है। तो नया स्कोर होगा $1+0+(2\times3)+0+(2\times5)+6 = 23$। ध्यान दीजिए कि स्कोर में दो अंकों की वृद्धि हुई है। थोड़ा-सा विचार करने पर पता चलेगा कि चालें चाहे जैसी चली जाएँ, स्कोर हमेशा एक सम संख्या में बदलता है, 0, 2,4 या 6।

चूँकि S का आरम्भिक मान 21 है जो कि एक विषम संख्या है इसलिए S का मूल्य हर चाल के बाद विषम होगा। परन्तु यदि सभी गोटियाँ एक ही खण्ड में पहुँच जाएँ तो S का मान निश्चित तौर पर 6 का गुणक होगा यानी सम संख्या होगा। लिहाज़ा, इस पहेली का कोई हल नहीं हो सकता।

हमें यह बात रोचक लगी कि पहेली का कोई हल नहीं है। फिर हमने सोचा कि बच्चे और शिक्षक ऐसी गणितीय समस्या को कैसे देखेंगे जिसका कोई हल ही न हो। अक्सर ऐसे सवालों को ग़लत या अपर्याप्त जानकारी वाला मानकर खारिज कर दिया जाता है। परन्तु शिक्षकों और विद्यार्थियों के लिए यह जानना रोचक और महत्त्वपूर्ण है कि गणितीय दृष्टि से 'कोई हल न होना भी एक वैध हल है'।

हम यह भी तभी कह सकते हैं कि किसी समस्या का कोई हल नहीं है, जब हमारे पास ऐसा दावा करने का स्पष्ट प्रमाण हो।

ये दोनों महत्त्वपूर्ण गणितीय विचार हैं : पहला, यह कि 'कोई हल न होना' गणित में मान्य बात है और दूसरा, इस दावे के लिए प्रमाण की आवश्यकता होती है कि किसी समस्या-विशेष का कोई हल नहीं है।

ये दोनों बातें फिलहाल हमारे गणित शिक्षण की समझ का हिस्सा नहीं हैं, ख़ासतौर पर प्राथमिक स्तर पर। प्रमाणों को अमूर्त माना जाता है और विद्यालयीन पाठ्यक्रम में उन्हें बहुत बाद में शामिल किया जाता है। इसके अतिरिक्त बिना हल वाले सवालों या एकाधिक हल वाले सवालों पर शायद ही कभी चर्चा होती है। जब हम इन बातों को ध्यान में रखकर पहेली पर काम कर रहे थे तो हमने इसमें शामिल विभिन्न कारकों के बारे में सोचना शुरू किया और यह भी कि कैसे उन्हें बदलने से सवाल बदल जाएगा। कारकों में गोटियों की संख्या, उनकी स्थिति और छलाँगों की संख्या शामिल थी।

उदाहरण के लिए, पहेली में हर खण्ड में केवल एक गोटी है। यदि इसकी जगह दो या अधिक गोटियाँ होतीं तो? यदि हर चाल में छलाँगों की संख्या बढ़ा दी जाए तो क्या होगा?

जब हमने इन परिवर्तनों के साथ काम किया तो ये भी हमें बहुत रुचिकर नहीं लगे। समझाते हैं कि ऐसा क्यों हुआ। हर खण्ड में अधिक गोटियाँ रखने से यह अधिक चुनौतीपूर्ण नहीं बल्कि थकाऊ प्रक्रिया बन जाती है। साथ ही, यह विस्तार बहुत छोटे बच्चों के लिए उपयुक्त नहीं होगा। (हमारा लक्ष्य छोटे बच्चे थे क्योंकि अभी उनका सामना 'प्रमाण और प्रमाणित करने' से नहीं हुआ था।) इसलिए हमारे मन में सन्देह था कि इससे पहेली अधिक रोचक बनेगी भी या नहीं।

दूसरी बात, हमने पाया कि छलाँग की संख्या या तो *विषम* हो सकती है या *सम* । *विषम* छलाँग में यह 1-1 छलाँग के समान ही आगे बढ़ेगी और *सम* छलाँग 2-2 में। इसमें कुछ भी चकराने वाला नहीं था!

परन्तु एक अन्य परिवर्तन हमें ज़्यादा रोचक लगा : वृत्त में खण्डों की संख्या में बदलाव। हमने यह देखने का प्रयास किया कि क्या एक ऐसे वृत्त में इस कार्य को पूरा किया जा सकता है जो n खण्डों में बँटा हो, जबकि n का मान 2 और 10 के बीच हो। तब हमने एक पैटर्न की तलाश की। इस परिवर्तित पहेली पर काम करते हुए हमारा ध्यान कुछ रोचक गणितीय प्रक्रियाओं पर गया। इसमें खेल-खेलते एक सामान्यीकृत पैटर्न पहचानना और n के वे मान पता करना जहाँ हल उपलब्ध हो और जहाँ हल उपलब्ध न हो, प्रत्येक मामले में प्रमाण तलाश करना आदि शामिल थे। यहीं पर गणितीय जुड़ाव के सभी तत्वों का अनुभव हुआ।

संशोधित सवाल और विद्यार्थियों के हल

हमने संशोधित प्रश्न को विभिन्न आयु वर्ग के विद्यार्थियों के समक्ष प्रस्तुत किया। इसके बाद हमने उनकी रणनीतियों की छानबीन की। उनके समक्ष प्रस्तुत समस्या इस प्रकार थी :

एक वृत्त n खण्डों में विभाजित है और उनमें से प्रत्येक खण्ड में एक गोटी है। आपको छलाँगों के माध्यम से उन सभी को एक खण्ड में लाना है। इस दौरान आपको निम्नलिखित नियमों का पालन करना है : (1) एक छलाँग में एक गोटी केवल पास के खण्ड में जा सकेगी। (2) प्रत्येक चाल में दो छलाँग लगाई जा सकेंगी। n के किस मान पर आप सभी गोटियों को एक खण्ड में ला सकेंगे? और आपने ऐसा क्यों कहा?

विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों के बड़े-बड़े समूहों के साथ संवाद से बहुत लाभ हुआ और हमें यह अवसर दो जगह मिला।

एक अवसर था मुम्बई स्थित होमी भाभा सेंटर फ़ॉर साइंस एजुकेशन में आयोजित 'राष्ट्रीय विज्ञान दिवस', जबकि दूसरा अवसर था लोकप्रिय व्याख्यान शृंखला 'चाय एंड व्हाय'।

('चाय एंड व्हाय' टीआईएफआर द्वारा आयोजित एक सार्वजनिक गतिविधि है। इसका आयोजन हर माह के दूसरे और चौथे रविवार को क्रमश: मुम्बई के जुहू स्थित पृथ्वी थिएटर और माटुंगा स्थित रूपारेल कॉलेज में होता है, जहाँ टीआईएफआर के सदस्यों के व्याख्यान होते हैं। 'चाय एंड व्हाय' का लक्ष्य मूलत: गणित और विज्ञान को लोकप्रिय बनाना है।)



हमने विविध प्रतिभागियों से चर्चा की। इनमें बच्चे और वयस्क (गणितज्ञ, भौतिकीविद सहित) सभी शामिल थे। हम यह देखने को उत्सुक थे कि विभिन्न आयु वर्ग के इन लोगों से किस तरह के प्रमाण सामने आते हैं। हम दो रोचक और प्रतिनिधि हल साझा कर रहे हैं।

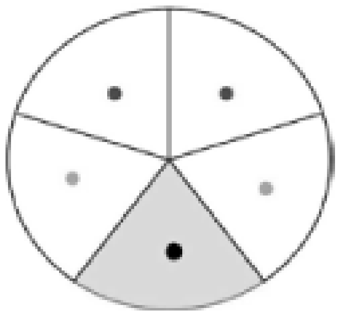
पर्याप्त समय दिए जाने के कारण सभी विद्यार्थी, यहाँ तक कि कक्षा-4 के विद्यार्थी भी एक सामान्य पैटर्न निकाल पाए। उन्होंने पता लगाया कि खण्डों की सभी विषम संख्याओं के अलावा उन संख्याओं के लिए भी समस्या का हल मौजूद है जो 4 से विभाज्य हैं। परन्तु उनमें से कई विश्वासपूर्वक यह नहीं कह पाए कि 4 से विभाजित न हो सकने वाली सम संख्याओं के लिए हल उपलब्ध नहीं हैं : उदाहरण के लिए 10। इसके अलावा जब उनसे पूछा गया कि वह यह कैसे कह सकते हैं कि 4 से विभाज्य सभी सम संख्याओं के लिए हल मौजूद है तो अधिकांश विद्यार्थियों ने केवल छोटी संख्याओं के उदाहरण ही दिए। समस्या को हल करने का उनका सामान्य तरीका आज़माइशी विधि पर आधारित था : n को 10 से कम लेकर हल निकालो और उसके बाद सामान्यीकरण करो। परन्तु उनमें से कोई भी ठीक से यह नहीं समझा पाया कि $n = 2$ या $n = 6$ के लिए कोई हल क्यों मौजूद नहीं है।

एक विद्यार्थी प्रमाण के काफी करीब पहुँचा। उसने यह बताने के लिए कि आखिर क्यों $n = 6$ अन्य से अलग है, कुछ बातें कहीं। उसने कहा : "माना कि हम एक खण्ड (लक्ष्य) को उस स्थान के रूप में चुनते हैं जहाँ सभी गोटियाँ एकत्रित होनी चाहिए। इसका अर्थ यह हुआ कि

उसी खण्ड की गोटी को वहाँ पहुँचने के लिए 0 छलाँग की आवश्यकता है। इसी प्रकार इसके दो निकटस्थ खण्ड में मौजूद गोटियों में से प्रत्येक को एक-एक छलाँग की आवश्यकता होगी, उनके निकटस्थ खण्डों की हरेक गोटी को दो छलाँग की आवश्यकता होगी। इस प्रकार हम पाते हैं कि अन्तिम खण्ड में पहुँचने के लिए जिन कुल छलाँगों की आवश्यकता है, वह $n = 6$ या 2 के लिए विषम होगी, लेकिन n के अन्य मानों के लिए सम होगी।" निश्चित रूप से जिस खण्ड की गोटी को अन्तिम खण्ड में पहुँचने के लिए 1 छलाँग की ज़रूरत होगी, यदि उसे विपरीत दिशा में चलाया जाए तो अन्तिम खण्ड तक पहुँचने के लिए उसे 5 छलाँगों की आवश्यकता होगी। परन्तु इसमें योग की द्विभाज्यता बरकरार रहती है। ('समद्विभाज्यता' से तात्पर्य इस बात से है कि कोई पूर्णांक संख्या *सम* है या *विषम* । ध्यान रहे कि किसी पूर्णांक में समसंख्या जोड़ने से द्विभाज्यता बरकरार रहती है और विषम संख्या जोड़ने से द्विभाज्यता विपरीत हो जाती है। 'द्विभाज्यता अपरिवर्तनीयता (parity invariance)' का उपयोग सवालों को हल करने और प्रमाण की रचना करने के लिए किया जाता है।)

यद्यपि वह इतने पर ही रुक गया लेकिन ऐसा प्रतीत होता है कि उसका कथन एक वैध प्रमाण के लिए अच्छा प्रस्थान बिन्दु था, यदि और समय दिया जाता तो सम्भवत: वह उसे पूरा कर देता। उसके प्रमाण को समझने और विस्तार देने के लिए हम इस तर्क को आगे बढ़ाते हैं। यदि n विषम हो तो किसी खण्ड की गोटी को एक ही दिशा से लक्ष्य तक पहुँचने के लिए विषम संख्या में छलाँगों की आवश्यकता है तो इसके ठीक विपरीत दिशा में जाने के लिए उसे सम संख्या में छलाँगों की ज़रूरत होगी। इस प्रकार हम प्रत्येक गोटी के लिए एक उचित दिशा चुन सकते हैं ताकि सम संख्या में छलाँगों की मदद से लक्षित खण्ड तक पहुँच जाएँ। यदि n 4 से विभाज्य हो तो लक्षित खण्ड से एकदम विपरीत स्थित खण्ड तक पहुँचने के लिए सम संख्या में छलाँगों की आवश्यकता होगी। शेष खण्ड सममित ढंग से व्यवस्थित हैं। ऐसे में, ऐसे प्रत्येक खण्ड का एक संगत खण्ड होगा जिसे लक्ष्य तक पहुँचने के लिए समान संख्या में छलाँग की आवश्यकता होगी।

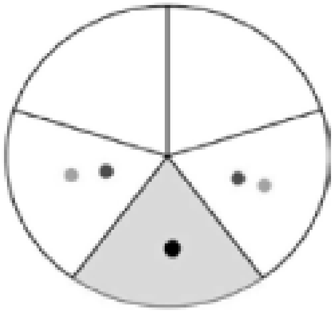
हमारा प्रमाण (उपपत्ति)



चित्र-2 : वृत $n = 5$ खण्डों में बँटा हुआ है और निचला खण्ड 'लक्ष्य' है।

हमारी उपपत्ति भी उस विद्यार्थी द्वारा बताए अनुरूप ही थी। मान लेते हैं कि n वृत्त के खण्डों की संख्या है। तब n या तो विषम होगा या 4 से विभाज्य होगा या सम होने के बावजूद 4 से विभाज्य नहीं होगा।

जब n विषम है : आइए एक खण्ड को लक्ष्य के रूप में चुनते हैं (देखिए **चित्र-2**)। अब हमारे पास गोटियों की एक सम संख्या है जिसे उस खण्ड में पहुँचाया जाना है। ये खण्ड सममित ढंग से व्यवस्थित हैं और उनकी गोटियों की दो-दो छलाँगों की चाल में लक्ष्य तक पहुँचाया जा सकता है यानी लक्ष्य की दिशा में एक गोटी की एक छलाँग, उसके बाद सममित ढंग से एक संगत गोटी की छलाँग। पहली चाल के बाद पहेली किस स्थिति में होगी यह **चित्र-3** में दिखाया गया है। इसलिए यदि n विषम है तो हम हर बार सभी गोटियों को एक साझा त्रिज्खण्ड में पहुँचा सकते हैं।



चित्र-3 : दो छलाँग वाली एक चाल के बाद $n = 5$ के लिए पहेली की स्थिति।

जब n 4 से विभाज्य है : किसी एक खण्ड को लक्ष्य के रूप में चिह्नित कीजिए। चूँकि n 4 का गुणज है इसलिए लक्ष्य के ठीक विपरीत गोटी को वहाँ तक पहुँचने के लिए सम संख्या में छलाँगों की ज़रूरत होगी। एक बार पुन: हमारे पास सम संख्या में गोटियाँ बची हैं जो सममित ढंग से व्यवस्थित हैं। इन्हें ऊपर विषम खण्डों में विभाजित वृत्त के लिए वर्णित ढंग से ही लक्ष्य तक ले जाया जा सकता है। इस प्रकार हमारे पास 4 से विभाज्य n के लिए भी हल है (विद्यार्थी की उपपत्ति के अनुरूप)।

जब n सम है लेकिन 4 से विभाज्य नहीं है : यदि $n = 6$ है तो हम उपरोक्त तर्क का प्रयोग नहीं कर सकते। निश्चित रूप से यह कोई उपपत्ति नहीं है। यह सिद्ध करने के लिए कि n के ऐसे किसी मूल्य के लिए हल नहीं है, हम हर खण्ड के लिए निम्नानुसार एक क्रमांक तय करते हैं। किसी भी खण्ड से शुरू करके हम उन्हें एक के बाद एक 0 और 1 क्रमांक देते हैं। चूँकि n सम है इसलिए यह सम्भव है। इसके अलावा प्रत्येक '1' के पड़ोस में '0' होगा और '0' के पड़ोस में '1' होगा।

अब प्रत्येक खण्ड के लिए हम उसके क्रमांक और उसमें रखी गोटियों की संख्या का गुणनफल निकालते हैं। शुरुआत में चूँकि प्रत्येक खण्ड में एक गोटी है इसलिए s होगा 1+0+1+0+1+0+... = $n/2$, एक विषम संख्या। प्रत्येक चाल में हम दो छलाँगें लेंगे। प्रत्येक चाल में कोई गोटी 0 से 1 में या 1 से 0 में जाएगी। इस प्रकार प्रत्येक चाल s को सम संख्या से विषम संख्या में बदलेगी या इसका उलटा होगा। *यानी, यह इसकी द्विभाज्यता को उलटता है।*

अत: दो छलाँग द्विभाज्यता को बरकरार रखती हैं। चूँकि खण्डों की संख्या 4 से विभाज्य नहीं है इसलिए हमारे पास '0' और '1', दोनों की विषम संख्याएँ होगी। अत: हम शुरुआत करते हैं s के विषम होने से। द्विभाज्यता अपरिवर्तनीय बनी रहती है। लेकिन समस्या के हल के लिए आवश्यक है कि सभी गोटियाँ किसी साझा खण्ड में आ जाएँ जहाँ s सम हो जाएगा। अत: इसका कोई हल नहीं है।

गतिविधि के निहितार्थ

इस गतिविधि का लक्ष्य 'अवधारणा आधारित पहेली' का उपयोग करके ऐसी चुनौतियाँ तैयार करना था जो बच्चों में औपचारिक उपपत्ति के विकास को प्रोत्साहन दें।

कुछ विद्यार्थियों ने कोई हल न होने का कारण बताया, इससे हमें यह प्रमाण मिला कि ऐसी गणितीय पहेलियाँ विद्यार्थियों को सवाल सुलझाने की गतिविधियों के लिए प्रेरित कर सकती हैं जो गणित की प्रकृति के अनुरूप हों।

एक पहेली की मदद से महत्त्वपूर्ण गणितीय विचारों को चिह्नित करना और उनके उपयोग से उपपत्ति की आवश्यकता को उभारना रोचक और सूझबूझ प्रदान करने वाला था। हमने देखा कि यह सम्भव है कि अत्यन्त छोटे बच्चों को उपपत्ति के विचार से जोड़ा जाए और उन्हें गणित में उपपत्ति के केन्द्रीय महत्त्व से अवगत कराया जाए। सीखने वालों को स्वयं अपनी उपपत्ति पेश करने के अवसर से, गणित करने की संस्कृति में प्रामाणिक भागीदारी निर्मित करने में मदद मिलेगी। ऐसी परिस्थितियाँ उन्हें गणित में गहनता की महत्ता से अवगत करा सकती हैं।

References

1. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg, Mathematical Circles (Russian experience), Universities Press 2000.

शिखा टेक्कर एचबीसीएसई, टीआईएफआर से डॉक्टरेट कर रही हैं। वे विद्यार्थियों की गणितीय विचार प्रक्रिया से जुड़े पहलुओं पर प्राथमिक और माध्यमिक विद्यालयों के गणित शिक्षकों के साथ काम करती हैं। वे दिल्ली के हेरिटेज स्कूल में गणित की अध्यापिका रही हैं। वर्तमान में मुम्बई स्थित टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ़ सोशल साइंसेज़ में एमए के विद्यार्थियों को बाल विकास एवं संज्ञान विषय पर आधारित एक पाठ्यक्रम पढ़ाती हैं। वे अनुपात, आरम्भिक बीजगणित और दशमलव भिन्नों को लेकर बच्चों की विचार प्रक्रिया से जुड़े मुद्दों में रुचि रखती हैं। उनसे shikha@hbcse.tifr.res.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

रोस्सी वर्तमान में एचबीसीएसई, टीआईएफआर में शोध छात्र हैं। वे गणित शिक्षा में पीएचडी कर रहे हैं। एक व्याख्याता के रूप में काम करने के बाद उन्होंने नारायना हृदयालय अस्पताल में उपकरण सुधारक के रूप में काम किया और बाद में साइंस एक्सप्रेस ट्रेन में विज्ञान संचारक के रूप में कार्यरत रहे। उन्होंने अपनी एमटेक की शिक्षा पुणे विश्वविद्यालय से मॉडलिंग एंड सिमुलेशन विषय में पूरी की। उनकी विशेषज्ञता और काम कंप्यूटेशनल जीनोमिक्स में है। उनकी शोध रुचियों में विद्यालयीन गणित शिक्षण और गणितीय पहेलियाँ तथा गेम डिज़ाइन करना है। उनसे rossi@hbcse.tifr.res.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : पूजा सिंह **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी-एडीटर :** पारुल सोनी (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही